Тематическое задание «Дроби»

1. Петя тратит 1/3 своего времени на игру в футбол, 1/3 – на учебу в школе, 1/6 – на просмотр кинофильмов, 1/70 – на решение олимпиадных задач и 1/3 – на сон. Можно ли так жить?

2. Карлсон написал дробь 10/97. Малыш может: 1) прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, 2) умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь, а) равную ½? б) равную 1?

3. При всяком ли натуральном n, большем 2017, из дробей $\frac{1}{n}, \frac{2}{n-1}, \frac{3}{n-2}, \ldots, \frac{n-1}{2}, \frac{n}{1}$ можно выбрать две пары дробей с одинаковыми суммами?

4. Имеется семь стаканов с водой: первый стакан заполнен водой наполовину, второй – на треть, третий – на четверть, четвёртый – на 1/5, пятый – на 1/8, шестой – на 1/9, и седьмой – на 1/10. Разрешается переливать всю воду из одного стакана в другой или переливать воду из одного стакана в другой до тех пор, пока он не заполнится доверху. Может ли после нескольких переливаний какой-нибудь стакан оказаться заполненным а) на 1/12; б) на 1/6?

5. Число $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$ представили в виде несократимой дроби. Докажите, что если $3n+1$ – простое число, то числитель получившейся дроби делится на $3n+1$.

6. По окружности записали красным пять несократимых дробей с нечётными знаменателями, большими 1010. Между каждыми двумя соседними красными дробями вписали синим несократимую запись их суммы. Могло ли случиться, что у синих дробей все знаменатели меньше 100?