

**Список вопросов к ГЭК по направлению
01.03.01 «Математика»**

Математический анализ

1. Исследование функции с помощью производных: точки экстремума, выпуклость функции и точки перегиба. Асимптоты функции и их нахождение.
2. Понятие о неопределенном и определенном интеграле. Интегрирование заменой переменных.

Примерные задачи:

Задача 1

Найти производную функции: $y = \ln\sqrt{\cos 5x}$

Задача 2

Найти неопределенный интеграл $\int \frac{\cos 3x dx}{4 + \sin 3x}$

Задача 3

Вычислить определённый интеграл по формуле Ньютона-Лейбница $\int_0^1 e^{2x} dx$

Алгебра и геометрия

3. Способы представления решения системы линейных алгебраических уравнений: метод Гаусса, правило Крамера, матричный способ.
4. Определитель матрицы. Его свойства и правила вычисления.
5. Собственные вектора и собственные значения матрицы.

Примерные задачи:

Задача 1

Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \end{cases}$$

Задача 2

Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Задача 3

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 4

Найти обратную матрицу A^{-1} к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Дифференциальные уравнения

6. Алгоритм решения линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка. Задача Коши.

7. Алгоритм решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Задача Коши.

Примерные задачи:

Задача 1

Найти общее решение дифференциального уравнения $x \cdot y' + 2y = x^2$ и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = \frac{5}{4}$.

Задача 2

Найти общее решение дифференциального уравнения $2y'' + y' - y = 2e^x$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2$, $y'(0) = -\frac{3}{2}$.

Задача 3

Найти общее решение дифференциального уравнения $y' - 4xy = x$ и частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \frac{3}{4}$.

Задача 4

Найти решение задачи Коши для уравнения $y'' - 4y' + 4y = x + 3$, при условии $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Теория вероятностей и математическая статистика

8. Классическое определение вероятности. Основные формулы комбинаторики. Геометрическое определение вероятности.
9. Простые и сложные события. Основные теоремы теории вероятностей: теорема сложения, теорема умножения.
10. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
11. Статистическая гипотеза и общая схема ее проверки. Виды критической области. Ошибки I и II рода.

Примерные задачи:

Задача 1

Инвестор решил вложить поровну средства в три предприятия при условии возврата ему через определенный срок 150% от вложенной суммы каждым предприятием. Вероятность банкротства первого предприятия 0,2, второго – 0,15, третьего – 0,1. Найти вероятность того, что по истечении срока кредитования инвестор получит обратно по крайней мере вложенную сумму.

Задача 2

В данный район изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 3:2:5. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 80%, второй – 90%, третьей – 70%. Какова вероятность того, что приобретенное изделие, оказавшееся стандартным, изготовлено третьей фирмой?

Задача 3

Вероятность того, что изготовленный прибор удовлетворяет стандарту, равна 0,9. Оценить с помощью неравенства Чебышева наименьшее число приборов, которое следует отобрать, чтобы доля стандартных приборов отличалась от 0,9 не более чем на 0,03 (по абсолютной величине) с вероятностью, не меньшей 0,85.

Задача 4

Дано распределение признака X – выработка рабочих цеха в отчетном году (в % к предыдущему году).

x	94-100	100-106	106-112	112-118	118-124	124-130	130-136	136-142
n_i	3	7	11	20	28	19	10	2

где n_i - количество рабочих.

Определить среднюю выработку рабочих цеха в отчетном году.

Задача 5

Исправленное среднее квадратическое отклонение ежесуточного дохода случайно выбранных 10 киосков некой фирмы оказалось равно 100 ден.ед. Построить доверительный интервал для среднего квадратического отклонения с надежностью 90%. Предполагается, что доход – это нормально распределенная величина,
 $\chi^2(9; 0,95) = 3,33$, $\chi^2(9; 0,05) = 16,9$.

Задача 6

По двум независимым, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей выборкам, объемы которых $m=10$ и $n=10$ соответственно, найдены выборочные средние, равные 14,3 и 12,2 соответственно. Генеральные дисперсии известны: 22 и 18 соответственно. На уровне значимости 0,05 проверить гипотезу $H_0 : M_x = M_y$ при альтернативной гипотезе $H_1 : M_x \neq M_y$.

Численные методы

12. Итерационные методы решения линейных алгебраических уравнений: метод Зейделя.
13. Интерполяция многочленами: метод Лагранжа.
14. Разностные схемы для уравнения теплопроводности.

Примерные задачи:

Задача 1

Пусть дана СЛАУ

$$\begin{cases} a \cdot u_1 + 2u_2 = 1, \\ 2u_1 + u_2 = 2. \end{cases}$$

Итерационный метод Зейделя для решения этой системы сходится. Какое из нижеприведенных значений и почему может принимать параметр a :

- А) -2 и 2; Б) -5 и 5; В) 2 и 5; Г) 5.

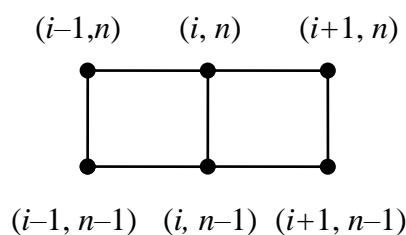
Задача 2

Выписать интерполяционную формулу Лагранжа $L_1(u)$ для функции, заданной таблично

$$\begin{array}{c|c|c} u & 0 & 2 \\ \hline f(u) & 7 & 11 \end{array}.$$

Задача 3

Для численного решения уравнения теплопроводности используется шеститочечный шаблон



Полученную разностную схему можно охарактеризовать как и почему:

- А) явная, двухслойная
- Б) явная, трехслойная
- В) неявная, двухслойная
- Г) неявная, трехслойная

Методы оптимизации

- 15. Этапы принятия решений и решения проблем (1-5 этапы): информация, варианты, критерии, анализ вариант, процедура принятия решения.
- 16. Задача об оптимальном распределении ресурсов: построение модели.
- 17. Задача об оптимальном распределении ресурсов: графическая интерпретация решения и его устойчивость.

Примерные задачи:

Задача 1

Найти минимальное значение целевой функции $F(x) = -x_1 + 4x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Дать графическое пояснение решения.

Задача 2

Транспортная задача, решаемая методом потенциалов, имеет текущее распределение поставок, представленное в таблице, где u и v - потенциалы.

Является ли данный вариант поставок оптимальным и если да, то каково оптимальное значение целевой функции L .

	10	12	8	u_i
14	⁴	³ 12	¹ 2	0
6	⁴	⁴	² 6	1
10	¹ 10	² 0	³	-1
v_j	2	3	1	

Математические основы теории прогнозирования

- 18. Предмет, цель и задачи теории прогнозирования. Основные методы статистического прогнозирования.
- 19. Метод наименьших квадратов (МНК) в оценке параметров модели прогнозирования, его графическая интерпретация.
- 20. Оценка качества модели прогнозирования. Коэффициент детерминации.

Примерные задачи:

Задача 1

Методом наименьших квадратов определить параметры линейной зависимости $y = a + bx$ по следующим данным:

X	1	2	3	4	5
Y	6	8	10	8	12

Задача 2

По дисперсионной таблице найти коэффициент детерминации и проверить модель на значимость по критерию Фишера при уровне значимости 0,05 ($F_{кр} = F(0,05; 2; 10) = 4,1$):

Компоненты дисперсии	Суммы квадратов отклонений	Числа степеней свободы	Дисперсия на 1 степень свободы
Регрессионная	200	2	100
Остаточная	50	10	5
Общая	250	12	-

Математические методы и модели финансового анализа

21. Факторные модели в экономических исследованиях.
22. Текущая стоимость ценных бумаг с фиксированным доходом.
23. Применение теории вероятностей в финансовом анализе.

Примерные задачи:

Задача 1

Определить текущую стоимость облигации с номиналом 1200 руб., купонной процентной ставкой 12% годовых и среднерыночным безрисковым процентом равным 8%, если срок до погашения два года.

Задача 2

В рамках однофакторной модели рассматривается доходность ценной бумаги

$$r = 5 + 0,4 \cdot F + \varepsilon,$$

где F - некоторый фактор, ε - случайная ошибка.

Определить ожидаемое значение доходности ценной бумаги, если значение фактора является случайной величиной равномерно распределенной в интервале (8%, 12%).